数理解析研究所講究録
1029 巻 1998 年 152-163



# 2 次元減衰性乱流における スケーリング指数 $\xi$ の理論的決定

九工大・情報工 岩山隆寛 (Takahiro Iwayama)

九大・理 藤坂博一 (Hirokazu Fujisaka)

高知大・理 岡本壽夫 (Hisao Okamoto)

Abstruct

2 次元 (2-D) 減衰性乱流の第 2 ステージでは，渦に関係した諸量が時間と共に代数的に発展する．特に時刻 $t$ での渦の個数 $N(t)$ は $N \sim t^{-\xi}$ で減衰する．これらの諸量の時間発展は指数 $\xi$ によって特徴付けることができ，数値シミュレーションや実験室内の実験において，このスケーリング指数は $\xi = 0.7 \sim 0.75$ であることが知られている．本論文では，Carnevale *et al.* [Phys. Rev. Lett. **66**, 2735 (1991)] によって提出されたスケーリング的考えに渦のハミルトン動力学的移流を導入し，このスケーリング指数を理論的に決定し，$\xi = 2/3$ を得た．$\xi$ の理論的導出を試みた McWilliams [J. Fluid Mech. **219**, 361 (1990)] や Benzi *et al.* [J. Phys. A: Math. Gen. **21**, 1221 (1988)] の研究と本研究との比較も行った．

## 1 はじめに

2 次元乱流は，3 次元乱流に比べて数値計算を行う上での手軽さや，大規模な地球流体力学的流れへの応用を期待され，研究されてきた．2 次元乱流では 3 次元乱流に比べて複雑な乱流特性を持つ．特にエネルギーの逆カスケードに起因する秩序渦の存在が大きな特徴となっている．この秩序渦の存在によってエネルギースペクトルの傾きが Kraichnan-Batchelor 理論 (Kraichnan, 1967; Batchelor, 1969) からずれたり，流体中に浮遊する粒子の拡散が通常の Brown 粒子的正常拡散よりも遅くなる異常拡散現象 (Cardoso *et al.*, 1996) などが生じる．したがって，2 次元乱流を理解するうえで，秩序渦が 2 次元乱流に果たしている役割 (その生成機構，時間発展，秩

序渦間の相互作用等) を研究することは重要なことである．本研究で考察する 2-D 減衰性乱流は extrnal forcing が無いため，強制乱流に比べて秩序渦の個性が顕著に現れるため，秩序渦の集団を研究するには格好の対象であると考えられる．

近年の数値的研究によって，2 次元減衰性乱流の時間発展は 3 つのステージに分類できることが明らかにされた (Benzi *et al.*, 1988, 1992; McWilliams, 1984, 1990; Santangelo *et al.*, 1989; Weiss and McWilliams, 1993)．第 1 ステージでは，流体が秩序渦の集団に向けて自己組織化する．第 2 ステージでは秩序渦が系の動力学を支配する．渦間距離が渦のサイズよりも十分に大きいときは，渦の運動は秩序渦と等価な点渦系のハミルトニアン動力学によって近似的に記述される相互移流を起こす．また，それらが近づくと同符号の渦間に引力が働き，合体してより大きな渦になり，異符号の渦間には斥力が働く．最終的に異符号の渦の一組のペアが双極子構造を形成する (Matthaeus *et al.*, 1991a, 1991b)．最後のステージでは，この双極子構造が粘性によって減衰する．

第 2 ステージでは，秩序渦の諸量，例えば，渦の総数 $N$，渦の平均半径 $R_a$ 等が時間と共に代数的に発展することが知られている．そのような時間発展に対して Carnevale *et al.*, (1991) は，新しいスケーリング理論を提唱した．彼らの理論では，渦の集団に関係した諸量や流れの場の空間平均モーメントの時間発展のスケーリング指数は，渦の個数のスケーリング指数 $\xi$ によって決定される．このスケーリング則は数値実験 (Carnevale *et al.*, 1991, 1992; Weiss and McWilliams, 1993) や実験室内の実験 (Tabling *et al.*, 1991) により正しいことが示され，$\xi = 0.7 \sim 0.75$ が得られている．$\xi$ を理論的に決定する試みは，コロイド粒子の凝集過程 (Chandrasekhar, 1943) との対応から McWilliams(1990) により行なわれている．彼は渦の大きさが領域の大きさに比べて小さく，渦の配置が全体的にランダムで互いに無相関であり，さらに渦が崩壊する確率は 2 つの渦が互いにある臨界距離以内に存在する頻度に比例するとして，渦の個数に関する時間発展方程式を導き，$\xi = 1$ を得た．この理論的考察と数値実験の不一致性は，相互移流による渦の接近がランダムな運動よる接近よりも稀に起こるためである，と彼は指摘した．なぜならば，相互移流の速度ベクトルは渦の間の分離ベクトルに直角だからである．一方 Benzi *et al.* (1988) は渦の半径の大

きさ分布を作るメカニズムを説明するために，渦の大きさ分布に対する運動学的方程式をたてている．このモデルからも粒子の個数のスケーリング指数 $\xi = 1$ が導かれることが Carnevale *et al.* (1991) により指摘されている．即ち，スケーリング指数 $\xi$ の理論的決定は未解決の問題である．

先の論文で我々は，Carnevale *et al.* (1991) のスケーリング則を再考察し，彼らの議論における流れの場の空間平均モーメントに関するスケーリング則，即ち全エネルギーと全エンストロフィーのスケーリング則は，渦に付随した量 ($-\omega\psi/2$ や $\omega^2/2$ を渦の領域のみで積分したもの) のスケーリング則であることを示した．ここで $\psi$ は流れ関数，$\omega$ は渦度を表す．そしてこれらの量の再解釈により，彼らの理論は，渦に付随した量の時間発展を記述する法則であること，2次元減衰性乱流の特徴のうち，渦のハミルトン動力学的移流のみが取り入れられていないことを指摘した (Iwayama and Okamoto, 1996)．そこで本論文では，渦のハミルトン動力学方程式と Carnevale *et al.* (1991) のスケーリング理論を同時に考慮して，2次元減衰性乱流の現象論としての Carnevale *et al.* (1991) の理論を完全なものにすると共に，スケーリング指数 $\xi$ の理論的決定を行う．

本論文の概要を以下に述べる．2節では Carnevale *et al.* (1991) のスケーリング理論を簡潔にレヴューする．3節では渦のハミルトン動力学的方程式と彼らのスケーリング理論を同時に考慮することにより，$\xi = 2/3$ が導かれることを示す．4節では渦間平均距離と渦の個数との関係から，McWilliams (1990) や Benzi *et al.* (1988) の議論と同様に，渦のハミルトン動力学的方程式を，渦の個数の時間発展方程式に書き換え，我々の得た渦の個数に関する時間発展方程式と彼らの得たそれとを比較する．

## 2 Carnevale *et al.* (1991) のスケーリング理論の簡単なレビュー

2次元減衰性乱流の第2ステージでは，渦の集団に関係した諸量や流れの場の空間平均モーメントが時間と共に代数的に発展する．Carnevale *et al.*(1991) は，このステージでは秩序渦が系の動力学を支配していることから，全運動エネルギー $E$ と全エンストロフィー $Z$ を渦の諸量，即ち渦の個数 $N$，渦の平均半径 $R_a$，渦の中心にお

ける渦度の値の平均値 $\omega_a$, を用いて次元解析的に次のように表現した：

$$E \sim N\omega_a^2 R_a^4, \tag{1}$$

$$Z \sim N\omega_a^2 R_a^2. \tag{2}$$

渦の個数が

$$N \sim t^{-\xi} \tag{3}$$

に従って振る舞うならば, $E$ と $\omega_a$ が高 Reynolds 数状態での系の保存量であることを考慮すると, (1) と (3) より

$$R_a \sim t^{\xi/4} \tag{4}$$

を, 方程式 (2), (3), (4) から

$$Z \sim t^{-\xi/2} \tag{5}$$

が得られる. さらに, 渦の間の平均距離 $l_a$,

$$l_a \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \sim t^{\xi/2}, \tag{6}$$

と 1 個の渦の平均循環 $\Gamma_a$,

$$\Gamma_a \sim \omega_a R_a^2 \sim t^{\xi/2} \tag{7}$$

のスケーリング則も導いた. 一方, 渦の平均移流速度 $u_a$ は, その近傍の渦による移流によって決定されると考え, (6) と (7) を用いて彼らは渦の平均移流速度のスケーリング則

$$u_a \sim \frac{\Gamma_a}{l_a} \sim t^0 \tag{8}$$

を導いた. 彼らは, 全運動エネルギー $E$ を不変量であると仮定して議論を展開したので, (8) 式. 即ち $u_a^2 \sim E \sim t^0$. は自己矛盾のない結論であると述べた. なお, Carnevale *et al.* (1991) 自身の数値計算でも, Weiss and McWilliams (1993) によって行われた数値計算によるスケーリング則の追試でも, (8) のスケーリング則は確かめられていないことを注意しておく.

最近 (1) と (2) はそれぞれ全運動エネルギーと全エンストロフィーではなく，$-\langle\omega\psi\rangle/2$ と $\langle\omega^2\rangle/2$ を秩序渦の領域，秩序領域，で積分したものであることが，理論的・数値的に示された．さらにこの空間平均モーメントの再解釈により，Carnevale *et al.* (1991) のスケーリング則は，渦の集団の時間発展に関する現象論であり，2 次元減衰性乱流中の渦の特徴のうち，渦のハミルトン動力学的移流以外の性質はすべて考慮されていることが指摘された (Iwayama and Okamoto 1996).

## 3 渦の移流速度のスケーリング則とスケーリング指数 $\xi$ の決定

我々は，渦の平均移流速度のスケーリング (8) は次の様な 3 つの点から誤りであると主張する．第 1 に，(8) の導出は秩序渦間の相互作用が最近接相互作用であることを拠り所にしているが，これは秩序渦間の相互作用は長距離相互作用であること[1]と矛盾している．第 2 に，移流速度が時間発展において一定に保たれているという (8) の結果は，次のような 2 つの事実から誤りであることが示唆される: 数値計算によると，渦の移流速度は，半径の大きな渦ほど遅いことが知られており (Benzi *et al.*, 1988)，一方，渦の半径は時間と共に大きくなるので，従って渦の移流速度は時間と共に遅くなるはずである．さらに今考察している 2 次元減衰性乱流は，sinh-Poisson 方程式 $\omega \propto \sinh(\beta\psi)$ で特徴づけられる平衡状態へ向けての緩和過程であり，この状態では渦は静止している (Joyce and Montgomery, 1978; Dmitruck *et al.*, 1996)．これらのことは渦の移流速度が時間と共に遅くなっていくと言うことをほのめかしている．最後に，彼らは $u_a \sim t^0$ の結果は全運動エネルギー $E$ を一定と仮定したことと矛盾しないので，速度のスケーリングが正しいと主張している．しかしながら，Iwayama and Okamoto (1996) によって明らかにされたように，全運動エネルギー $E$ と考えられ，スケーリング関係の導出において時間的保存量と思われていた $N\omega_a^2 R_a^4$ は，全運動エネルギーではなく，コヒーレントな渦の集団系のハミルトニアンである．そこで，Carnevale *et al.* (1991) が述べた $u_a \sim t^0$ の正当性は失われた.

[1]秩序渦集団の運動を近似的に記述できる点渦モデルのハミルトニアン $H$ は，$\log r_{ij}$ の項を含んでいる．ここで $r_{ij}$ は $i$ 番目と $j$ 番目の渦間距離である.

我々は，渦の移流は， 点渦系のハミルトニアン動力学 (Saffman, 1992),

$$\Gamma_i \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \Gamma_i \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \tag{9}$$

から導かれるべきであると主張する．なぜならば，秩序渦は互いに離れているときには, 点渦系のハミルトニアン動力学によって近似的に記述されるような相互移流を起こすからである．なお (9) の点渦系で合併過程を記述しようとすると，幾何学的に点である複数個の点渦が一点に集中するために，解が発散する．このことは点渦のハミルトニアンには，自己相互作用が含まれていないこととも対応する．しかしながら，有限の大きさをもった秩序渦のハミルトニアンは，自己相互作用の寄与も含まれていて，さらに時間的に一定であることから，秩序渦の場合は，合併過程まで含めて，渦の移流がハミルトン動力学的移流 (9) によって記述できると考えられる．そこで我々は (9) を考慮して，渦の移流速度を

$$u_a \sim \frac{H}{\Gamma_a l_a} \tag{10}$$

とスケールする． $H$ は時間的に不変であることと， (6), (7) を用いて速度のスケーリング則

$$u_a \sim t^{-\xi} \tag{11}$$

を得る． (11) は期待されたように，時間とともに渦の移流速度が遅くなることを示している．また，ハミルトニアン $H$ の保存が考慮されていることを注意しておく．

次にスケーリング指数 $\xi$ を決定する． 4 個以上の点渦を含む点渦系の運動はカオスであることが知られている (Aref, 1986)． 今考察している減衰性乱流の第 2 ステージでは，渦は多数個存在するので，そこで，第 2 ステージにおける秩序渦の運動は，カオス的であると仮定できる．このとき渦のカオス的運動による混合効果は, 流れの等方性を保証するであろう．このことによって渦の平均移流速度 $u_a$ が渦の平均相対速度 $dl_a/dt$ と同じオーダーであると考えられる．したがって我々は

$$u_a \sim \frac{dl_a}{dt} \sim \frac{l_a}{t} \tag{12}$$

とスケールする．このとき (6), (11), (12) より

$$\xi = \frac{2}{3} \tag{13}$$

が導かれる．したがって，$R_a \sim t^{1/6}$, $Z \sim t^{-1/3}$, $l_a \sim t^{1/3}$, $\Gamma_a \sim t^{1/3}$, $u_a \sim t^{-2/3}$ を得る．

## 4　考察

スケーリング指数 $\xi$ を決定するための方法として，McWilliams (1984) や Benzi *et al.* (1988) によって展開されたような，渦の個数に関する時間発展方程式 (渦の運動論的方程式) からの議論の展開も考えられる．Benzi *et al.* (1988) は，数値シミュレーションによって示された半径 $R$ を持った渦の個数の分布則 $\eta(R)$ のスケーリング則，$\eta(R) \sim R^{-\alpha}, (\alpha \sim 1.9)$，のスケーリング指数 $\alpha$ の選択機構を明らかにするために，半径 $R_i$, $(R_0 \leq R_1 \leq R_2 \leq \ldots \leq R_i)$ の渦の集団を考えた．同じ大きさ，同じ符号の 2 つの渦の合併が支配的動力学であり，特に半径 $R_i$ の 2 つの渦が合併して半径 $R_{i+1}$ の 1 個の渦が出来ると仮定し，半径 $R_i$ の渦の個数 $n_i$ の時間発展方程式を導いた：

$$\frac{dn_i}{dt} = \frac{1}{2}\frac{n_{i-1}}{\tau_{i-1}} - \frac{n_i}{\tau_i}. \tag{14}$$

ここで $\tau_i$ は半径 $R_i$ の渦の合併率の逆数である．渦がランダムな運動をする粒子と考えると，古典力学の標準的議論により

$$\tau_i{}^{-1} = n_i \sigma_i u_i \tag{15}$$

が得られる．ここで $\sigma_i$ は渦の合併の断面積，$u_i$ は半径 $R_i$ の渦の移流速度である．荒い見積もりとして，

$$\sigma_i \sim R_i. \tag{16}$$

また，数値計算によると小さな渦は大きな渦よりも速く動くことから

$$u_i \sim R_i{}^{-1} \tag{17}$$

と見積もり，$n_i$ の時間発展方程式 (14) を閉じることができる；

$$\frac{dn_i}{dt} = \frac{1}{2}C n_{i-1}{}^2 - C n_i{}^2. \tag{18}$$

平均場近似的取り扱いにより，(18) から渦の個数 $N = \sum_i n_i$ に関する時間発展方程式,

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{2}\tilde{C}N^2 \tag{19}$$

が得られる．$\tilde{C}$ は $C$ のオーダーの量である．この方程式からは $\xi = 1$ が導かれる．McWillimas (1990) もコロイド粒子の凝集過程 (Chandrasekhar, 1943) との対応から (19) と同じ方程式を導き, $\xi = 1$ を得た．Benzi *et al.* (1988) や McWillimas (1990) の議論において注目すべき点は，速度のスケーリング，即ち (17) 式に，Carnevale *et al.* (1991) のスケーリング則からの結論 (8) を用いていない点である．しかしながら既に指摘したとおり移流速度のスケーリング (8) は誤りであり，また修正されたスケーリング則 (11) を用いたとしても，導かれるスケーリング指数は $\xi = 4/7$ であり，この値はシミュレーションや実験による結果よりも小さい．

次に Benzi *et al.* (1988) や McWillimas (1990) の導いた方程式と我々がスケーリング指数の導出で用いた方程式を比較する．スケーリング指数の決定に用いた渦間平均距離の時間発展方程式 (12) は，渦間平均距離と渦の個数の関係

$$l_a \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \tag{20}$$

を用いると，次のような形の渦の個数に関する時間発展方程式に書き直すことが出来る：

$$\frac{dN}{dt} \sim -u_a N^{3/2} = -\frac{u_a}{N^{1/2}} N^2. \tag{21}$$

ここで，Benzi *et al.*(1988) の様なランダムな粒子の衝突の描像を適用すると，渦の衝突断面積として

$$\sigma_a \sim l_a \tag{22}$$

が得られる．即ち，ランダムな運動をする粒子の衝突に比べて，秩序渦の衝突断面積は長い，という結果が得られる．コヒーレント渦の，"異符号の循環を持つものは互いに反発し，同符号の循環の渦は引き合い，合併する"という性質は，電荷を持った粒子の散乱に類似している．荷電粒子では，異符号の電荷を持つ粒子が衝突併合

し，同符号の電荷の粒子が反発しあう．荷電粒子は，自分自身の周りに長距離のクーロンポテンシャルを持っていて，衝突 (散乱) 断面積は, 古典的粒子の半径よりもはるかに長い．この様な荷電粒子の散乱との類推により，秩序渦の衝突断面積が渦の半径よりも長くなるという結論が理解できる．

スケーリング指数における理論的予測と数値計算による結果の間の僅かの違いの理由は，理論では揺らぎの効果を無視しているからであると考えられる． Carnevale *et al.* (1991) や本論文では，物理量をすべて渦に関係した諸量の平均値で表現している．即ち，これらの理論は渦の集団に関する平均場理論であり，揺らぎの効果を無視している．熱平衡系の臨界現象等でよく知られているように，平均場理論は現象を定性的に説明できるが，数値的に異なる臨界指数を与える（例えば， Ma, 1976; Goldenfeld, 1992）．このような臨界現象との対応から，揺らぎの効果の無視が理論的予測と数値実験結果の違いであると考えられるだろう．揺らぎの効果を正しく見積もることにより，実験にあう数値が得られると考えられる．

最後に有限 Reynolds 数状態に対する理論の補正について言及しておく．有限 Reynolds 数状態に対する Carnevale *et al.* (1991) のスケーリング則の補正が， Weiss and McWilliams (1993) によって議論されている．これは，有限 Reynolds 数状態では，渦の中心における渦度の値 $\omega_a$ が時間と共に僅かに減少する ($\omega_a \sim t^{-\eta}, \eta = 0.1$)．ハミルトニアン $H$ が保存することと，粒子の個数のスケーリングを束縛条件として，スケーリング指数の補正が導かれる．このとき半径 $R_a$ と渦度の尖度 $K_a$ のスケーリング指数は補正されるが，その他の量，例えば渦の個数 $N$ や循環 $\Gamma_a$ は補正されない．そこで，本論文で導いた渦の移流速度 (11) も補正されない．

## 謝辞

本研究を進めるにあたり，九州大学理学部の宮原三郎教授，廣岡俊彦助教授，中島健介，三好勉信，両博士から有益な助言をいただきました．ここに記して感謝いたします．

## 参考文献

H. Aref and N. Pomphrey, "Integrable and chaotic motions of four vortices I. The case of identical vortices," Proc. R. Soc. Lond. A **380**, 359 (1982).

G. K. Batchelor, "Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence," Phys. Fluids Suppl. **12**, II-233 (1969).

R. Benzi, S. Patarnello and P. Santangelo, "Self-similar coherent structures in two- dimensional decaying turbulence," J. Phys. A: Math. Gen. 21, 1221 (1988).

R. Benzi, M. Colella, M. Briscolini and P. Santangelo, "A simple point vortex model for two-dimensional decaying turbulence," Phys. Fluids A **4**, 1036 (1992).

O. Cardoso, B. Gluckmann, O. Parcollet and P. Tabeling, "Dispersion in a quasi-two- dimensional-turbulent flow: An experimental study," Phys. Fluids **8**, 209 (1996).

G. C. Carnevale, J. C. McWilliams, Y. Pomeau, J. B. Weiss and W. R. Young, "Evolution vortex statistics in two-dimensional turbulence," Phys. Rev. Lett. **66**, 2735 (1991).

G. C. Carnevale, J. C. McWilliams, Y. Pomeau, J. B. Weiss and W. R. Young, "Rates, pathways, and end states of nonlinear evolution in decaying two-dimensional turbulence: Scaling theory versus selective decay," Phys. Fluids A **4**, 1314 (1992).

S. Chandrasekhar, "Stochastic problems in physics and astronomy," Rev. Mod. Phys. **15**, 1 (1943).

P. Dmitruk, D. Gómez, A. Costa, and S. P. Dawson, "Asymptotic states of decaying turbulence in two-dimensional incompressible flows," Phys. Rev. E **54**, 2555 (1996).

N. Goldenfeld, *Lecture of Phase Transitions and the Renormalization Group*, (Addison-Wesley, Publishing Co., Reading, Mass. 1992);

T. Iwayama and H. Okamoto, "Reconsideration of scaling theory in two-dimensional decaying turbulence," Prog. Theor. Phys. **96**, 1061 (1996).

G. Joyce and D. Montgomery, "Negative temperature states for the two-dimensional guiding centre plasma," J. Plasma Phys. **10**, 107 (1978).

R. H. Kraichnan, "Inertial ranges of two-dimensional turbulence," Phys. Fluids **10**, 1417 (1967).

S. K. Ma, *Modern Theory of Critical Phenomena*, (W. A. Benjamin, New York, 1976).

W. H. Matthaeus, W. T. Stribling, D. Martinez, S. Oughton and D. Montgomery, "Selective decay and coherent vortices in two-dimensional incompressible turbulence," Phys. Rev. Lett. **66**, 2731 (1991a).

W. H. Matthaeus, W. T. Stribling, D. Martinez, S. Oughton and D. Montgomery, "Decaying, two-dimensional, Navier-Stokes turbulence at very long times," Physica D **51**, 531 (1991b).

J. C. McWilliams, "The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow," J. Fluid Mech. **146**, 21 (1984).

J. C. McWilliams, "The vortices of two-dimensional turbulence," J. Fluid Mech. **219**, 361 (1990).

G. Saffman, *Vortex Dynamics*, (Cambridge U.P., Cambridge, 1992).

P. Santangelo, R. Benzi and B. Legras, "The generation of vortices in high-resolution, two-dimensional decaying turbulence and the influence of initial condition on the breaking of self-similarity," Phys. Fluids A **1**, 1027 (1989).

P. Tabeling, S. Burkhart, O. Cardoso and H. Willaime, "Experimental study of freely decaying two-dimensional turbulence," Phys. Rev. Lett. **67**, 3772 (1991).

J. B. Weiss and J. C. McWilliams, "Temporal scaling behavior of decaying two-dimensional turbulence," Phys. Fluids A **5**, 608 (1993).